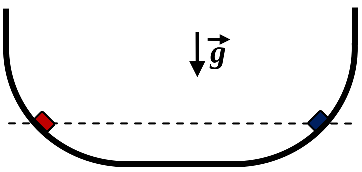
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «Робофест» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2021 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
БИЛЕТ № 01 (10-11 классы): возможные решения и критерии

Задание 1:
Вопрос: Небольшая шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной плоскости, налетает на такую же покоящуюся шайбу, и происходит косой упругий удар. Найдите угол разлета шайб после удара.
Задача: Две маленькие шайбы с разными массами отпускают без начальных скоростей с одинаковой высоты $h = 25$см в яме–«полутрубе» с гладкими стенками (форма которых – четверть цилиндра с вертикальным продолжением сверху), гладко переходящими в гладкое горизонтальное дно (см. рисунок). На горизонтальном дне ямы произошел упругий косой удар, в результате которого более тяжелая шайба уменьшила свою скорость в два раза и развернулась на 90°. На какую максимальную высоту поднимется более легкая шайба по стене ямы (высота стенки больше этой высоты, а ее длина такова, что шайбы не покидают ямы за время подъема).



Ответ на вопрос: Запишем законы сохранения энергии и импульса для упругого удара двух одинаковых шайб с начальными скоростями v_0 и 0 и конечными скоростями v и V соответственно: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mV^2}{2} \Longrightarrow v_0^2 = v^2 + V^2$ и $m\vec{v}_0 = m\vec{v} + m\vec{V} \Longrightarrow v_0^2 = v^2 + V^2 + 2vV\cos(\vartheta)$. Здесь ϑ – искомый угол разлета шайб. Вычитая эти соотношения друг из друга, находим, что $vV\cos(\vartheta) = 0$. Так как скорости шайб после косого упругого удара не могут равняться нулю, то $\cos(\vartheta) = 0 \Longrightarrow \vartheta = 90°$.

Правильно записан закон сохранения энергии	**2**
Правильно записан (в векторной или в компонентной форме) закон сохранения импульса	**2**
Из этих соотношений получено правильное уравнение для угла разлета	**3**
Дан правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Ясно (из закона сохранения механической энергии), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу. Направим ось x по направлению движения боле тяжелой шайбы (массы M) до удара, а ось y – по направлению ее движения после удара (перпендикулярно x). Закон сохранения импульса в проекции на эти оси дает:

$$\begin{cases} Mv_0 - mv_0 = mv_x \\ 0 = M\dfrac{v_0}{2} + mv_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = (n-1)v_0 \\ v_y = -\dfrac{n}{2}v_0 \end{cases}$$

Здесь $n \equiv \dfrac{M}{m}$, а $\vec{v}$ – скорость более легкой шайбы после удара. Подставим эти соотношения в уравнение закона сохранения энергии $\dfrac{(M+m)v_0^2}{2} = \dfrac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \dfrac{M(v_0/2)^2}{2}$. Получим, что $n(5n-11) = 0$. Поскольку $M \neq 0$, то $n = 2{,}2$. Движение вдоль оси y не влияет на подъем шайбы на стенку ямы, а $v_x = 1{,}2 \cdot v_0$. Снова воспользуемся законом сохранения энергии: максимальная высота подъема легкой шайбы на стенку ямы $h' = \dfrac{v_x^2}{2g} = 1{,}44 \cdot \dfrac{v_0^2}{2g} = 1{,}44h = 36$см.

Указано (используется в решении), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу	**2**
Правильно записан закон охранения импульса для соударения шайб (в векторной или компонентной форме)	**2**
Правильно выражена скорость легкой шайбы после удара через n	**3**
Правильно записан закон сохранения энергии для соударения шайб	**2**
v_x правильно выражена через v_0	**3**
Получены правильные аналитический ($h' = 1{,}44h$) и численный ответы	**2+1=3**
ВСЕГО	**15**

Задание 2:
Вопрос: В сосуде под подвижным поршнем находится воздух с относительной влажностью 60%. Какой станет относительная влажность воздуха, если опустить поршень, уменьшив объем воздуха в 2 раза, не нарушая герметичности сосуда и поддерживая неизменной температуру его содержимого?

Задача: В хорошо загерметизированном помещении температура воздуха равна $t_0 = 21^\circ$C, а его относительная влажность $r_0 = 20{,}0$ %. В помещении включили обогреватель. Когда температура поднялась до $t_1 = 24^\circ$C, относительная влажность стала равна $r_1 = 16{,}8$ %. Какой станет относительная влажность воздуха в помещении при повышении температуры до $t_2 = 27^\circ$C? В интервале температур от $t_0 = 21^\circ$C до $t_2 = 27^\circ$C с удовлетворительной точностью зависимость давления насыщенного пара от температуры можно считать линейной.

Ответ на вопрос: Если конденсация водяного пара в процессе сжатия не начнется, то масса водяного пара останется неизменной. Тогда при изотермическом сжатии парциальное давление водяного пара будет расти обратно пропорционально объему, и к концу сжатия возрастет в 2 раза. Давление насыщенного водяного пара зависит только от температуры, и поэтому оно останется неизменным. Значит, в отсутствие конденсации относительная влажность возросла бы в 2 раза и составила 120%. Но это невозможно в устойчивом равновесном состоянии. Значит, на самом деле в процессе сжатия началась конденсация водяного пара, и в конечном состоянии пар насыщенный. Относительная влажность станет равна 100%.

Указано, что масса водяного пара может меняться только из-за конденсации	**3**
Указано, что в отсутствие конденсации давление росло бы обратно пропорционально объему	**2**
Указано (используется в решении), что давление насыщенного пара при постоянной температуре неизменно	**2**
Дан правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, давление паров воды массой m в помещении объемом V при температуре T равно $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Давление насыщенного пара, согласно условию, можно записать в виде $p_н(T) = aT + b$. Поэтому относительная влажность воздуха $r(T) = \frac{mR}{\mu V}\frac{T}{aT+b}$, и можно заметить, что обратная величина является линейной функцией обратной абсолютной температуры: $\frac{1}{r} = A + B\frac{1}{T}$. Запишем эти соотношения для температур t_0 и t_1: $\frac{1}{r_0} = A + B\frac{1}{T_0}$ и $\frac{1}{r_1} = A + B\frac{1}{T_1}$. Выразим из них коэффициенты зависимости $A = \frac{r_0T_1 - r_1T_0}{r_0r_1(T_1-T_0)}$ и $B = -\frac{T_0T_1(r_0-r_1)}{r_0r_1(T_1-T_0)}$, и с их помощью вычисляем относительную влажность при t_2: $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_0r_1(T_1-T_0)}\left(r_0T_1 - r_1T_0 - \frac{T_0T_1}{T_2}(r_0-r_1)\right)$. В результате получаем:

$$r_2 = \frac{r_0r_1(T_1-T_0)T_2}{T_2(r_0T_1 - r_1T_0) - T_0T_1(r_0-r_1)} \approx 14{,}5\%.$$

Допустимо частичное использование числовых данных: например, при подстановке значений температур $r_3 = \frac{50r_0r_1}{99r_0 - 49r_1} \approx 14{,}5\%$.

Давление паров выражено из уравнения Менделеева-Клапейрона	**3**
Используется формула линейной зависимости для $p_н(T)$	**2**
Записана линеаризованная связь r и температуры	**3**
Коэффициенты линейной зависимости выражены через данные задачи (аналитически или численно)	**2+2=4**
Записано выражение для r_2	**1**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 3:
Вопрос: Две горизонтальные трубы проложены параллельно, имеют одинаковую длину и одинаковое сечение почти по всей длине, кроме участка в середине, где у одной из труб имеется уширение (сечение трубы плавно увеличивается, а потом плавно уменьшается до первоначального значения). На вход обеих труб вода подается с одинаковой скоростью. В некоторый момент времени на вход труб одновременно попадают частицы краски, плывущие по течению, не касаясь стенок. В какой из труб (постоянного сечения или с уширением) частицы краски доплывут до конца трубы раньше? Сжимаемостью и вязкостью воды можно пренебречь. Ответ объяснить.

Задача: На конце шланга диаметром 3 см поставили коническую насадку длиной $l = 40$ см с диаметром выходного отверстия 1,5 см. Струю направляют горизонтально, а давление в шланге таково, что струя попадает в мишень, расположенную от выходного отверстия на расстоянии по горизонтали L и ниже по высоте на H. Известно, что $H=\frac{1}{7}L$ и что необходимое давление оказалось на $\Delta p=27$ кПа больше атмосферного. Затем насадку поменяли на другую – такой же длины, но с диаметром выходного отверстия 1 см, и установили ее концом вверх под углом 45° к горизонту. Какое избыточное давление нужно создать в шланге теперь, чтобы струя по-прежнему попадала в мишень (положение выходного отверстия и мишени не изменились)? Плотность воды $\rho\approx 1$ г/см^3, ускорение свободного падения $g\approx 10$ м/с^2.

Ответ на вопрос: Для стационарного течения расход воды в каждом сечении постоянен. Так как сжимаемостью воды можно пренебречь, то это условие можно записать в виде $vS=const$. Значит, в области уширения вода (а вместе с ней и частицы краски) движутся медленнее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения. Поэтому до конца трубы частицы краски раньше доплывут в трубе постоянного сечения.

Указано, что расход воды в каждом сечении постоянен	**3**
Условие постоянства расхода используется в виде $vS=const$	**2**
Указано, что в области уширения вода и частицы краски движутся медленнее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения	**2**
Дан верный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Поскольку струя попадает в мишень, то скорость ее выхода из насадки в первом случае определяется из соотношения $L=v_0t=v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\Rightarrow v_0^2=\frac{gL^2}{2H}$. Так как расход воды при прохождении конической насадки в каждом сечении постоянен, то скорость воды на входе в насадку $V=\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2v_0$. Перепад давлений можно определить из уравнения Бернулли (давление на выходе из насадки считаем равным атмосферному): $\frac{\rho V^2}{2}+p=\frac{\rho v_0^2}{2}+p_0\Rightarrow\Delta p=\frac{\rho v_0^2}{2}\left[1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4\right]=\frac{15gL^2}{64H}$. Во втором случае для нахождения скорости выхода воды из насадки запишем уравнение траектории «маленькой» порции воды

$$\left\{\begin{array}{c} x(t)=v_0'\cos(\alpha)t \\ y(t)=v_0'\sin(\alpha)t-\dfrac{gt^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow y(x)=\mathrm{tg}(\alpha)\cdot x-\frac{g\,x^2}{2v_0'^2\cos^2(\alpha)}=\mathrm{tg}(\alpha)x-\frac{g\,x^2}{2v_0'^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)].$$

Для точки падения $-H=L\cdot\mathrm{tg}(\alpha)-\frac{gL^2}{2v_0'^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]$. По условию, $\alpha=45°$, и поэтому $v_0'^2=\frac{gL^2}{2(L+H)}$.

Скорость входа воды в насадку теперь $V'=\left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2v_0'$, а уравнение Бернулли принимает вид $\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh+p=const$. При прохождении насадки центр масс слоя поднимается на высоту $h_2-h_1\approx l\sin(\alpha)$. Значит, $\frac{\rho V'^2}{2}+p'=\frac{\rho v_0'^2}{2}+\rho gl\sin(\alpha)+p_0$, и

$$\Delta p'=\frac{\rho v_0'^2}{2}\left(1-\frac{d_2^4}{d_0^4}\right)+\rho gl\sin(\alpha)=\frac{20}{81}\frac{gL^2}{L+H}+\rho gl\sin(\alpha)=\frac{256}{243}\frac{H}{L+H}\Delta p+\rho gl\sin(\alpha)\approx 6{,}4\text{ кПа}.$$

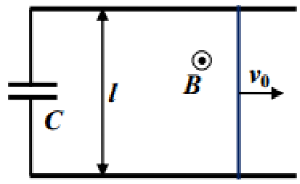
Правильно определено v_0 (для первого случая)	**1**
Записано выражение для скорости на входе в насадку $V=\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2v_0$	**2**
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для первого случая	**1**
Получена формула, эквивалентная $\Delta p=\frac{15gL^2}{64H}$	**2**
Правильно определено v_0' (для второго случая)	**2**

Записано выражение для скорости на входе в насадку $V' = \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 v_0'$	**1**
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для второго случая	**2**
Получена правильная формула для $\Delta p'$	**2**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 4:

Вопрос: Проводящий стержень длиной $l = 1$м движется в плоскости, перпендикулярной вектору индукции $B = 0{,}2$Тл постоянного однородного магнитного поля со скоростью $v = 3$м/с. Вектор скорости перпендикулярен стержню. Найдите разность потенциалов на концах стержня.

Задача: Изучите возможность преобразования энергии, теряемую массивным телом при торможении, в энергию заряда конденсатора емкостью $C = 5$Ф. Дрезина массой $m = 10$т движется со скоростью $v_0 = 20$м/с, и опускает на горизонтальные сверхпроводящие шины проводящую перемычку длины $l = 1{,}2$м, замыкая цепь заряда конденсатора. Шины и перемычка находятся в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 10$Тл. Трение перемычки о шины пренебрежимо мало. Найдите максимальный заряд конденсатора и КПД его зарядки до этого заряда (затратами считать потерю кинетической энергии дрезины).



Ответ на вопрос: Свободные носители заряда в проводящем стержне будут перемещаться до тех пор, пока сила со стороны возникшего из-за их разделения электрического поля не уравновесит силу Лоренца: $eE = evB \Rightarrow E = vB$. Разность потенциалов между концами стержня $U = E \cdot l = vBl = 0{,}6$В.

Правильно указано условие прекращения движения носителей заряда в стержне (или высказана идея расчета разности потенциалов как ЭДС индукции в воображаемом контуре)	**3**
Получено уравнение $E = vB$ (или записан закон Фарадея)	**3**
Указано (используется в решении), что $U = E \cdot l$ (или получена формула для ЭДС индукции)	**2**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: При движении перемычки в магнитном поле в ней наводится ЭДС индукции. В соответствии с законом Фарадея, величина этой ЭДС $\mathrm{E}_i = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv$. Ток зарядки конденсатора в момент, когда его заряд $q = CU_C$ определяется из соотношения $I = \frac{\mathrm{E}_i - U_C}{R} = \frac{Bl}{R}v - \frac{q}{CR}$. Ускорение дрезины создается силой Ампера, действующей на перемычку: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{IBl}{m}$. Заметим, что для любого малого интервала времени $\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{Bl}{m}\frac{\Delta q}{\Delta t}$, то есть заряд растет, а скорость падает – пока ЭДС индукции не сравняется с напряжением на конденсаторе: $Blv_{\min} = \frac{q_{\max}}{C}$ (после этого заряд конденсатора перестанет расти, а скорость – уменьшатся). Кроме того, $\Delta v = -\frac{Bl}{m}\Delta q$, и, суммируя все малые изменения, находим: $v_0 - v_{\min} = \frac{Bl}{m}q_{\max}$. Из двух полученных уравнений для минимальной скорости и максимального заряда находим: $v_0 - v_{\min} = \frac{B^2l^2C}{m + B^2l^2C}v_0$, $q_{\max} = \frac{mBlv_0C}{m + B^2l^2C} \approx 1119$Кл. Максимальная энергия заряда конденсатора $E_{\max} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{m^2B^2l^2Cv_0^2}{2(m + B^2l^2C)^2}$, а потеря кинетической энергии дрезины $\Delta E_K = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{m(2m + B^2l^2C)B^2l^2Cv_0^2}{2(m + B^2l^2C)^2}$, поэтому КПД зарядки $\eta = \frac{E_{\max}}{\Delta E_K} = \frac{m}{2m + B^2l^2C} \approx 48\%$.

В целом можно заметить, что вообще максимальное возможное значение КПД близко к 50% при $B^2l^2C << m$. Можно также заметить, что $v_0 - v_{\min} \approx 0{,}067 \cdot v_0$, то есть зарядка одного конденсатора в таком режиме тормозит дрезину лишь на небольшую часть скорости (а при существенном торможении заметно уменьшается КПД зарядки), поэтому в реальности имеет смысл использовать большое количество последовательно заряжаемых конденсаторов.

Правильно определена ЭДС индукции в перемычке	**1**
Правильно записана связь тока в перемычке со скоростью и зарядом конденсатора	**2**
Правильно записано уравнение движения дрезины	**2**
Записано условие баланса напряжений для установившегося режима, эквивалентное $Blv_{\min} = \frac{q_{\max}}{C}$	**2**
Получено соотношение, эквивалентное $v_0 - v_{\min} = \frac{Bl}{m} q_{\max}$	**3**
Правильно найден максимальный заряд конденсатора (формула или число)	**2**
Правильно найдены максимальное значение энергии конденсатора и изменение кинетической энергии дрезины	**1+1=2**
Получен правильный численный ответ для КПД зарядки (в интервале от 47% до 50%)	**1**
ВСЕГО	**15**