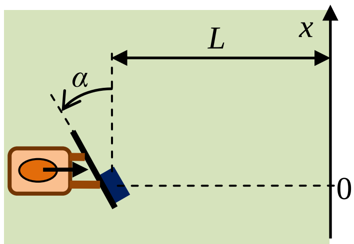
## ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «Робофест» по ФИЗИКЕ
## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2017 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
## БИЛЕТ № 01 (10-11 классы): возможные решения

**Задание 1:**

**Вопрос**: На горизонтальной поверхности лежит доска, на которой покоится небольшой брусок массы $m = 250$ г. Коэффициент трения между доской и бруском равен $\mu = 0{,}4$. Доску быстро сместили вдоль нее самой по поверхности на расстояние $S = 1$м. При этом брусок сдвинулся относительно поверхности на расстояние $s = 50$ см. Какое количество тепла выделилось из-за трения между бруском и доской? Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с$^2$.

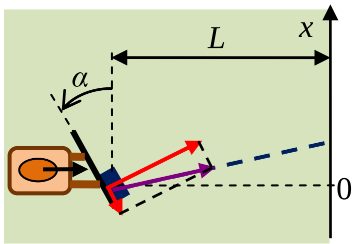
**Ответ**: Количество тепла равно модулю работы силы трения скольжения, которая равна $\mu mg$, а относительное смещение бруска и доски равно $S - s$. Итак, $Q = \mu mg(S - s) = 0{,}5$ Дж.

**Задача**: Модель бульдозера должна вытеснить за пределы поля небольшую коробку. Скорость модели направлена перпендикулярно краю поля, а ковш повернут на угол $\alpha = 30°$ относительно этого края (см. рисунок). Начальное расстояние от коробки до края поля $L = 10$ м, коэффициент трения между ковшом и коробкой $\mu = 0{,}5$. Найдите координату $x$ точки, в которой коробка пройдет край. Во сколько раз отличаются количества теплоты, выделившиеся из-за трения между ковшом и коробкой и между коробкой и полом? Коэффициент трения коробки о пол $\mu' = 0{,}1$.




Коробка движется поступательно и не отрывается от ковша. Скорость модели постоянна.

**Решение**: Коробка двигалась бы перпендикулярно краю поля, если бы не скользила по ковшу. Но в этом случае также была бы направлена и равнодействующая сил трения о ковш и силы нормальной реакции ковша. Но тогда между этими силами выполнялось бы соотношение $F_{тр} = N tg(\alpha) = \dfrac{N}{\sqrt{3}}$, что невозможно, ибо $F_{тр} \le \mu N = 0{,}5N$. Значит, коробка скользит по ковшу.




Поэтому результирующая сила $\vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ направлена под углом $\beta = arctg(\mu)$ к силе $\vec{N}$, то есть под углом $\alpha - arctg(\mu)$ к перпендикуляру к краю поля. Значит, $x = L \cdot tg[\alpha - arctg(\mu)] = L\dfrac{tg(\alpha) - \mu}{1 + \mu tg(\alpha)} \approx 0{,}6$ м. Так как скорость модели постоянна, то и скорость коробки почти на всем пути постоянна, и поэтому сила $\vec{F}$ равна по величине силе трения коробки о пол $\vec{F}'_{тр}$. Тогда $F_{тр} = \sin[arctg(\mu)]F = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}F'_{тр}$, и соотношение количеств теплоты, выделившиеся из-за трения между ковшом и коробкой и между коробкой и полом $\dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\dfrac{s}{S}$, где $s$ – величина проскальзывания коробки по ковшу, а и $S$ – путь коробки по полу. Из геометрии находим; что $s = \dfrac{x}{\cos(\alpha)} = L\dfrac{tg(\alpha) - \mu}{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)}$, а $S = \dfrac{L}{\cos[\alpha - arctg(\mu)]} = L\dfrac{\sqrt{1+\mu^2}}{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)}$. Итак, $\dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{\mu(tg(\alpha) - \mu)}{1+\mu^2} \approx 0{,}03$.

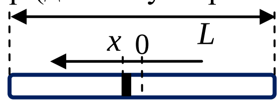
**Ответ**: $x = L\dfrac{tg(\alpha) - \mu}{1 + \mu tg(\alpha)} \approx 0{,}6$ м, $\dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{\mu(tg(\alpha) - \mu)}{1+\mu^2} \approx 0{,}03$.

**Задание 2:**

**Вопрос**: На сколько процентов нужно изотермически уменьшить объем идеального газа, чтобы его давление возросло на 25%? А на 0,5% (ответ дайте с точностью до 0,1%)?

**Ответ**: Согласно закону Бойля-Мариотта, в изотермическом процессе $pV = const$. Поэтому, если $\frac{p'}{p} = 1{,}25$, то $\frac{V'}{V} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$, то есть для увеличения давления на 25% нужно уменьшить объем на 20%. Аналогично для $\frac{p'}{p} = 1{,}005$ получается $\frac{V'}{V} = \frac{1}{1{,}005} \approx 0{,}995$, то есть во втором случае уменьшить объем нужно примерно на 0,5%. Можно сделать вывод: при малых изменениях величины относительных изменений совпадают с точностью до поправок большего порядка малости.

**Задача:** В конструкции специализированного робота используется акселерометр (датчик ускорения) следующей конструкции: в гладкой герметичной горизонтальной трубке, заполненной газом, находится небольшой поршень. В отсутствие ускорения поршень располагается точно посередине трубки. При появлении продольного ускорения поршень смещается. На испытаниях робот двигался с ускорением $a = 1{,}5$ м/с$^2$, а температура газа равнялась $t \approx 12°C$, и при этом смещение поршня составило $x = 3{,}8$ мм. В один из моментов работы робота смещение поршня равнялось $x' = 5{,}6$ мм при температуре газа $t' \approx 27°C$. С каким продольным ускорением двигался робот? Ответ нужно получить с ошибкой менее 2%.




**Решение**: Поскольку в отсутствие ускорения поршень располагается точно посередине трубки, то в трубке по разные стороны от поршня находится одинаковое количество газа $\nu$. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в каждой из частей трубки, в которой поршень смещен от середины на $x$ при температуре $T$: $p_1 S\left(\frac{L}{2} - x\right) = p_2 S\left(\frac{L}{2} + x\right) = \nu RT$ (здесь $S$ – площадь поперечного сечения трубки). Дополним их уравнением движения поршня массой $m$, движущегося вместе с трубкой с ускорением $a$: $ma = p_1 S - p_2 S$. Выразив силы давления из первых двух соотношений и подставив их в третье, получим связь ускорения и смещения:

$$ma = \frac{2\nu RT}{L - 2x} - \frac{2\nu RT}{L + 2x} \Rightarrow \frac{8x}{L^2 - 4x^2} = \frac{m}{\nu RT} a .$$

При указанных в условиях величинах ускорений и температурах, близких к нормальной, смешения небольшого по массе поршня должны быть малы по сравнению с длиной трубки ($x << L$). Поэтому в знаменателе можно пренебречь $4x^2$ по сравнению с $L^2$, и тогда $x \approx \frac{mL^2}{8\nu R} \frac{a}{T}$. Например, если давление в трубке близко к нормальному атмосферному, а масса поршня равна 100 г при площади 1 см$^2$ (то есть он весьма тяжелый), то для создания ускорения в 1 м/с$^2$ достаточно, чтобы разность давлений составляла 1% от равновесного давления. Того же порядка должна быть и относительная разность объемов, тогда $\frac{4x^2}{L^2} \approx 10^{-4}$! Значит, точность полученной формулы при разумных значениях параметров акселерометра значительно лучше требуемой. Таким образом, для разных значений температуры и ускорения $\frac{x'}{x} = \frac{T}{T'} \frac{a'}{a} \Rightarrow a' = \frac{T'x'}{Tx} a \approx 2{,}33$ м/с$^2$. В вычислениях округление производим с учетом требуемой точности.

Ответ: $a' = \frac{T'x'}{Tx} a \approx 2{,}33$ м/с$^2$.

**Задание 3:**

**Вопрос**: Электродвигатель, работающий от источника постоянной ЭДС, поднимает по очереди два разных груза. Сила тяги двигателя пропорциональна силе тока, текущего в обмотке. Для первого груза эта сила тока меньше, чем для второго. Какой из грузов поднимается с большей установившейся скоростью? Ответ объяснить.

**Ответ**: Работа сторонних сил источника с ЭДС $\mathrm{E}$ идет на механическую работу двигателя, перемещающего груз силой $F$ со скоростью $v$, и на компенсацию тепловых потерь на сопротивлении $R$, то есть $\mathrm{E} \cdot I = RI^2 + F \cdot v$. Если $F = kI$, то $v = \frac{\mathrm{E} - RI}{k}$, то есть установившаяся скорость больше при меньшем токе. Значит, большая скорость у первого груза.

**Задача**: Двигатель робота работает от аккумулятора с ЭДС $\mathrm{E}=24$ В. Известно, что сила, с которой двигатель натягивает наматывающийся на вал прочный легкий трос, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке. Когда закрепленный робот поднимает вверх с помощью этого троса груз массой $m=1$ кг, ток в обмотке равен $I_1=1{,}5$ А при установившейся скорости подъема $v_1=2{,}4$ м/с. С какой установившейся скоростью закрепленный робот будет подтягивать этим же тросом тот же груз по горизонтальной поверхности? Коэффициент трения между грузом и поверхностью $\mu=0{,}5$.

**Решение**: При установившейся скорости подъема ускорение груза равно нулю, то есть сила тяги двигателя уравновешивает вес груза. Значит, уравнение энергетического баланса имеет вид $\mathrm{E}\cdot I_1=RI_1^2+mg\cdot v_1$, причем, поскольку $F=kI$, то $I_1=\dfrac{mg}{k}$. Во тором случае при установившемся движении сила тяги уравновешивает силу трения скольжения, то есть $\mathrm{E}\cdot I_2=RI_2^2+\mu mg\cdot v_2$ и $I_2=\dfrac{\mu mg}{k}=\mu I_1$. Исключая из уравнений энергетического баланса сопротивление контура обмотки, получаем: $(1-\mu)\mathrm{E}I_1=mg(v_2-\mu v_1)$. Таким образом, $v_2=\mu v_1+(1-\mu)\dfrac{\mathrm{E}I_1}{mg}=3$ м/с.

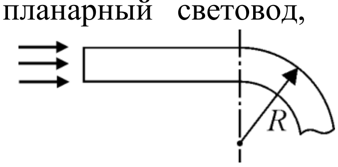
**Ответ**: $v_2=\mu v_1+(1-\mu)\dfrac{\mathrm{E}I_1}{mg}=3$ м/с.

**Задание 4:**

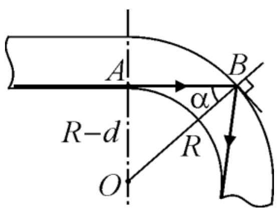
**Вопрос**: При каких условиях можно наблюдать явление полного внутреннего отражения?

**Ответ**: Полное внутреннее отражение наблюдается в ситуациях, когда закон Снелла выдает для синуса угла преломления невозможное ($\geq 1$) значение. Такое возможно, если луч выходит из оптически более плотной среды с показателем преломления $n_1$ в оптически менее плотную – с $n_2<n_1$, и угол падения превышает по величине «угол полного внутреннего отражения» $\alpha\geq\alpha_{\text{ПВО}}=\arcsin(n_2/n_1)$.

**Задача**: В оптической системе робота используется так называемый планарный световод, представляющий собой плоскопараллельную пластинку толщиной $d=1$ мм, изготовленную из прозрачной пластмассы с показателем преломления $n=1{,}5$. Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке. Перпендикулярно торцу пластинки падает в плоскости рисунка параллельный пучок света. Найдите минимально допустимый радиус кривизны $R_{\min}$ изгиба пластинки, при котором свет не будет выходить из пластинки наружу через ее боковую поверхность. Радиус кривизны определяйте по внешней (по отношению к направлению изгиба) поверхности пластинки.




**Решение**: Рассмотрим ход светового луча, распространяющегося вплотную к внутренней поверхности плоской части пластинки (см. рисунок). Легко видеть, что из всех лучей, попавших внутрь пластинки через ее торец, этот луч имеет наименьший угол падения $\alpha$ на искривленную поверхность пластинки. Рассматриваемый луч не выйдет наружу, если он испытает на искривленной поверхности полное отражение, условие которого имеет вид: $\sin\alpha\geq\dfrac{1}{n}$. Ясно, при выполнении этого условия все остальные лучи, образующие пучок, также не выйдут из пластинки через ее искривленную поверхность. На рисунке видно, что $\sin\alpha=\dfrac{R-d}{R}$.




Из записанных соотношений находим, что $R_{\min}=\dfrac{nd}{n-1}=3$ мм.

**Ответ:** $R_{\min}=\dfrac{nd}{n-1}=3$ мм.