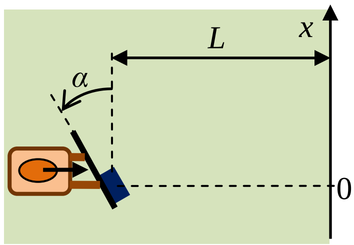
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «Робофест» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2017 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
БИЛЕТ № 02 (10-11 классы)

Задание 1:

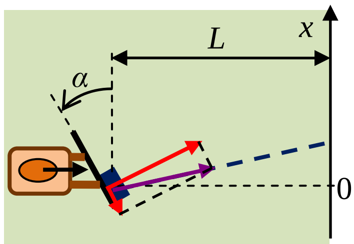
Вопрос: На горизонтальной поверхности лежит доска, на которой покоится небольшой брусок массы $m = 200$ г. Коэффициент трения между доской и бруском равен $\mu = 0{,}5$. Доску быстро сместили вдоль нее самой по поверхности на расстояние $S = 0{,}8$ м. При этом брусок сдвинулся относительно поверхности на расстояние $s = 40$ см. Какое количество тепла выделилось из-за трения между бруском и доской? Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ: Количество тепла равно модулю работы силы трения скольжения, которая равна μmg, а относительное смещение бруска и доски равно $S - s$. Итак, $Q = \mu mg(S - s) = 0{,}4$ Дж.

Задача: Модель бульдозера должна вытеснить за пределы поля небольшую коробку. Скорость модели направлена перпендикулярно краю поля, а ковш повернут на угол $\alpha = 30°$ относительно этого края (см. рисунок). Начальное расстояние от коробки до края поля $L = 9$ м, коэффициент трения между ковшом и коробкой $\mu = 0{,}4$. Найдите координату x точки, в которой коробка пройдет край. Во сколько раз отличаются количества теплоты, выделившиеся из-за трения между ковшом и коробкой и между коробкой и полом? Коэффициент трения коробки о пол $\mu' = 0{,}1$. Коробка движется поступательно и не отрывается от ковша.



Решение: Коробка двигалась бы перпендикулярно краю поля, если бы не скользила по ковшу. Но в этом случае также была бы направлена и равнодействующая сил трения о ковш и силы нормальной реакции ковша. Но тогда между этими силами выполнялось бы соотношение $F_{тр} = N tg(\alpha) = \dfrac{N}{\sqrt{3}}$, что невозможно, ибо $F_{тр} \le \mu N = 0{,}4N$. Значит, коробка скользит по ковшу. Поэтому результирующая сила $\vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ направлена под углом $\beta = arctg(\mu)$ к силе $\vec{N}$, то есть под углом $\alpha - arctg(\mu)$ к перпендикуляру к краю поля. Значит, $x = L \cdot tg[\alpha - arctg(\mu)] = L\dfrac{tg(\alpha) - \mu}{1 + \mu tg(\alpha)} \approx 1{,}3$ м. Так как скорость модели постоянна, то и скорость коробки почти на всем пути постоянна, и поэтому сила $\vec{F}$ равна по величине силе трения коробки о пол $\vec{F}'_{тр}$. Тогда $F_{тр} = \sin[arctg(\mu)]F = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}F'_{тр}$, и соотношение количеств теплоты, выделившиеся из-за трения между ковшом и коробкой и между коробкой и полом $\dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\dfrac{s}{S}$, где s – величина проскальзывания коробки по ковшу, а и S – путь коробки по полу. Из геометрии находим; что $s = \dfrac{x}{\cos(\alpha)} = L\dfrac{tg(\alpha) - \mu}{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)}$, а $S = \dfrac{L}{\cos[\alpha - arctg(\mu)]} = L\dfrac{\sqrt{1+\mu^2}}{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)}$. Итак, $\dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{\mu(tg(\alpha) - \mu)}{1+\mu^2} \approx 0{,}06$.



Ответ: $x = L\dfrac{tg(\alpha) - \mu}{1 + \mu tg(\alpha)} \approx 1{,}3$ м, $\dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{\mu(tg(\alpha) - \mu)}{1+\mu^2} \approx 0{,}06$.

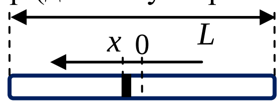
Задание 2:

Вопрос: На сколько процентов нужно изотермически уменьшить объем идеального газа, чтобы его давление возросло на 20%? А на 0,4% (ответ дайте с точностью до 0,1%)?

Ответ: Согласно закону Бойля-Мариотта, в изотермическом процессе $pV = const$. Поэтому, если $\dfrac{p'}{p} = 1{,}2$, то $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{1{,}2} \approx 0{,}833$, то есть для увеличения давления на 20% нужно уменьшить объем на

16,7%. Аналогично для $\frac{p'}{p}=1{,}004$ получается $\frac{V'}{V}=\frac{1}{1{,}004}\approx 0{,}996$, то есть во втором случае уменьшить объем нужно примерно на 0,4%. Можно сделать вывод: при малых изменениях величины относительных изменений совпадают с точностью до поправок большего порядка малости.

Задача: В конструкции специализированного робота используется акселерометр (датчик ускорения) следующей конструкции: в гладкой герметичной горизонтальной трубке, заполненной газом, находится небольшой поршень. В отсутствие ускорения поршень располагается точно посередине трубки. При появлении продольного ускорения поршень смещается. На испытаниях робот двигался с ускорением $a=2$ м/с^2, а температура газа равнялась $t\approx 12°C$, и при этом смещение поршня составило $x=5{,}7$ мм. В один из моментов работы робота смещение поршня равнялось $x'=4{,}5$ мм при температуре газа $t'\approx 27°C$. С каким продольным ускорением двигался робот? Ответ нужно получить с ошибкой менее 2%.



Решение: Поскольку в отсутствие ускорения поршень располагается точно посередине трубки, то в трубке по разные стороны от поршня находится одинаковое количество газа ν. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в каждой из частей трубки, в которой поршень смещен от середины на x при температуре T: $p_1S\left(\frac{L}{2}-x\right)=p_2S\left(\frac{L}{2}+x\right)=\nu RT$ (здесь S – площадь поперечного сечения трубки). Дополним их уравнением движения поршня массой m, движущегося вместе с трубкой с ускорением a: $ma=p_1S-p_2S$. Выразив силы давления из первых двух соотношений и подставив их в третье, получим связь ускорения и смещения:

$$ma=\frac{2\nu RT}{L-2x}-\frac{2\nu RT}{L+2x}\Rightarrow\frac{8x}{L^2-4x^2}=\frac{m}{\nu RT}a\,.$$

При указанных в условиях величинах ускорений и температурах, близких к нормальной, смешения небольшого по массе поршня должны быть малы по сравнению с длиной трубки ($x<<L$). Поэтому в знаменателе можно пренебречь $4x^2$ по сравнению с L^2, и тогда $x\approx\frac{mL^2}{8\nu R}\frac{a}{T}$. Например, если давление в трубке близко к нормальному атмосферному, а масса поршня равна 100 г при площади 1 см^2 (то есть он весьма тяжелый), то для создания ускорения в 1 м/с^2 достаточно, чтобы разность давлений составляла 1% от равновесного давления. Того же порядка должна быть и относительная разность объемов, тогда $\frac{4x^2}{L^2}\approx 10^{-4}$! Значит, точность полученной формулы при разумных значениях параметров акселерометра значительно лучше требуемой. Таким образом, для разных значений температуры и ускорения $\frac{x'}{x}=\frac{T}{T'}\frac{a'}{a}\Rightarrow a'=\frac{T'x'}{Tx}a\approx 1{,}66$ м/с^2. В вычислениях округление производим с учетом требуемой точности.

Ответ: $a'=\frac{T'x'}{Tx}a\approx 1{,}66$ м/с^2.

Задание 3:

Вопрос: Электродвигатель, работающий от источника постоянной ЭДС, поднимает по очереди два разных груза. Сила тяги двигателя пропорциональна силе тока, текущего в обмотке. Для первого груза эта сила тока меньше, чем для второго. Какой из грузов поднимается с большей установившейся скоростью? Ответ объяснить.

Ответ: Работа сторонних сил источника с ЭДС E идет на механическую работу двигателя, перемещающего груз силой F со скоростью v, и на компенсацию тепловых потерь на сопротивлении R, то есть $\mathrm{E}\cdot I=RI^2+F\cdot v$. Если $F=kI$, то $v=\frac{\mathrm{E}-RI}{k}$, то есть установившаяся скорость больше при меньшем токе. Значит, большая скорость у первого груза.

Задача: Двигатель робота работает от аккумулятора с ЭДС $\mathrm{E}=30$ В. Известно, что сила, с которой двигатель натягивает наматывающийся на вал прочный легкий трос, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке. Когда закрепленный робот поднимает вверх с помощью этого троса груз массой $m = 1$ кг, ток в обмотке равен $I_1 = 2$ А при установившейся скорости подъема $v_1 = 3{,}2$ м/с. С какой установившейся скоростью закрепленный робот будет подтягивать этим же тросом тот же груз по горизонтальной поверхности? Коэффициент трения между грузом и поверхностью $\mu = 0{,}4$.

Решение: При установившейся скорости подъема ускорение груза равно нулю, то есть сила тяги двигателя уравновешивает вес груза. Значит, уравнение энергетического баланса имеет вид $\mathrm{E} \cdot I_1 = RI_1^2 + mg \cdot v_1$, причем, поскольку $F = kI$, то $I_1 = \dfrac{mg}{k}$. Во втором случае при установившемся движении сила тяги уравновешивает силу трения скольжения, то есть $\mathrm{E} \cdot I_2 = RI_2^2 + \mu mg \cdot v_2$ и $I_2 = \dfrac{\mu mg}{k} = \mu I_1$. Исключая из уравнений энергетического баланса сопротивление контура обмотки, получаем: $(1-\mu)\mathrm{E}I_1 = mg(v_2 - \mu v_1)$. Таким образом, $v_2 = \mu v_1 + (1-\mu)\dfrac{\mathrm{E}I_1}{mg} = 4{,}88$ м/с.

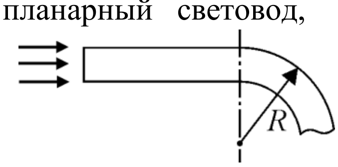
Ответ: $v_2 = \mu v_1 + (1-\mu)\dfrac{\mathrm{E}I_1}{mg} = 4{,}88$ м/с.

Задание 4:

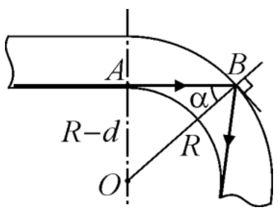
Вопрос: При каких условиях можно наблюдать явление полного внутреннего отражения?

Ответ: Полное внутреннее отражение наблюдается в ситуациях, когда закон Снелла выдает для синуса угла преломления невозможное (≥ 1) значение. Такое возможно, если луч выходит из оптически более плотной среды с показателем преломления n_1 в оптически менее плотную – с $n_2 < n_1$, и угол падения превышает по величине «угол полного внутреннего отражения» $\alpha \ge \alpha_{\text{ПВО}} = \arcsin(n_2 / n_1)$.

Задача: В оптической системе робота используется так называемый планарный световод, представляющий собой плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 1{,}2$ мм, изготовленную из прозрачной пластмассы с показателем преломления $n = 1{,}4$. Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке. Перпендикулярно торцу пластинки падает в плоскости рисунка параллельный пучок света. Найдите минимально допустимый радиус кривизны $R_{\min}$ изгиба пластинки, при котором свет не будет выходить из пластинки наружу через ее боковую поверхность. Радиус кривизны определяйте по внешней (по отношению к направлению изгиба) поверхности пластинки.



Решение: Рассмотрим ход светового луча, распространяющегося вплотную к внутренней поверхности плоской части пластинки (см. рисунок). Легко видеть, что из всех лучей, попавших внутрь пластинки через ее торец, этот луч имеет наименьший угол падения α на искривленную поверхность пластинки. Рассматриваемый луч не выйдет наружу, если он испытает на искривленной поверхности полное отражение, условие которого имеет вид: $\sin\alpha \ge \dfrac{1}{n}$. Ясно, при выполнении этого условия все остальные лучи, образующие пучок, также не выйдут из пластинки через ее искривленную поверхность. На рисунке видно, что $\sin\alpha = \dfrac{R-d}{R}$.



Из записанных соотношений находим, что $R_{\min} = \dfrac{nd}{n-1} = 4{,}2$ мм.

Ответ: $R_{\min} = \dfrac{nd}{n-1} = 4{,}2$ мм.