ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «РобоФест» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2016 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
БИЛЕТ № 02 (8-9 классы): возможные решения

Задание 1:

Вопрос: По реке плывет плот и рядом с ним управляемая модель катера. Что потребует меньшего расхода энергии – отвести модель от плота на 10 м по течению или на такое же расстояние против него? Ответ объяснить.

Задача: Мячик, брошенный в воду, проплывает по реке от пристани А до пристани В за время $t_1 = 12$ мин, а управляемая модель катера – за время $t_2 = 3$ мин. За какое время модель вернется от пристани В к пристани А, если ее двигатель будет работать с той же мощностью?

Ответ на вопрос: расход энергии будет одинаков: двигатель сообщает модели движение относительно воды, а плот движется вместе с водой, поэтому относительно плота оба движения совершенно одинаковы.

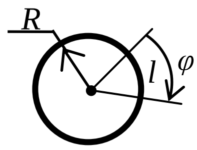
Решение задачи: Пусть s – расстояние от А до В вдоль русла, u – скорость течения в реке, а V – скорость модели относительно воды. Тогда $s = ut_1 = (u+V)t_2$ (по течению модель относительно берега движется со скоростью $V+u$). Следовательно, $V = \left(\frac{t_1}{t_2} - 1\right)u = 3u$. Против течения модель будет плыть относительно берега со скоростью $V - u = \left(\frac{t_1}{t_2} - 2\right)u = 2u$.

Поэтому время возвращения для модели $t = \frac{s}{V-u} = \frac{t_2}{t_1 - 2t_2}\frac{s}{u} = \frac{t_1 t_2}{t_1 - 2t_2} = 6$ мин.

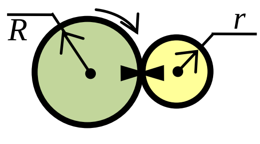
Ответ: $t = 6$ мин.

Задание 2:

Вопрос: Известно, что углы можно измерять не только в градусах, но и в *радианах* (рад). Величина угла в радианах равна отношению длины дуги, отсекаемой этим углом на окружности радиуса R, к радиусу: $\varphi = \frac{l}{R}$ (таким образом, угол 360° равен 2π радиан). Угловую скорость, то есть скорость изменения угла поворота, принято измерять в рад/с. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R. Как связаны между собой ее угловая скорость $\omega = \frac{\varphi}{t}$ и линейная скорость V?

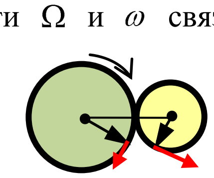


Задача: В некотором механизме ведущая шестеренка радиуса R вращается с угловой скоростью Ω. Эта шестеренка приводит в движение шестеренку меньшего радиуса, равного r. Шестеренки вращаются без проскальзывания. На ободе каждой шестеренки поставлена метка. В момент времени $t = 0$ эти метки соприкоснулись. Через какое время эти метки в первый раз будут двигаться во взаимно-перпендикулярных направлениях?



Ответ на вопрос: линейная скорость $V = \frac{l}{t}$, а длину пройденной дуги можно выразить через угол поворота $l = R\varphi$. Поэтому $V = R\frac{\varphi}{t} = R\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{V}{R}$.

Решение задачи: Поскольку шестеренки вращаются без проскальзывания, то линейные скорости точек их ободов будут совпадать. Значит, их угловые скорости Ω и ω связаны соотношением $\Omega R = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{R}{r}\Omega$. В каждый момент времени метки движутся по касательной к ободу (перпендикулярно радиусу шестеренки), поэтому скорости меток впервые станут



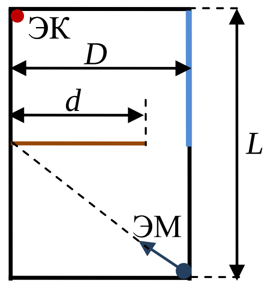
перпендикулярны, когда сумма углов их поворота от начального положения составит 90º, или $\frac{\pi}{2}$ рад. Значит, искомое время находится из уравнения $\Omega t+\omega t=\frac{\pi}{2}$, откуда $\Omega\left(1+\frac{R}{r}\right)t=\frac{\pi}{2}$, или $t=\frac{\pi r}{2\Omega(R+r)}$.

Ответ: $t=\frac{\pi r}{2\Omega(R+r)}$.

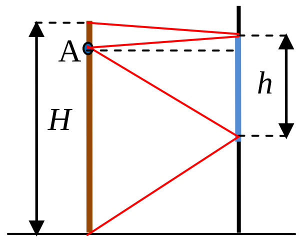
Задание 3:

Вопрос: Какую минимальную высоту должно иметь плоское зеркало, висящее вертикально, чтобы человек ростом 160 см увидел себя в нем с головы до ног? Ответ обосновать.

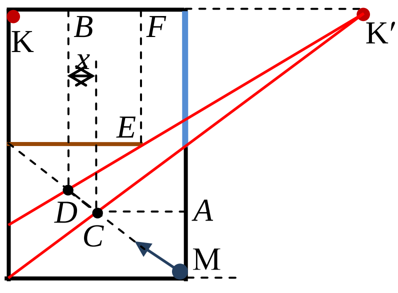
Задача: Электронная мышка (ЭМ) испускает свет во все стороны. Глаза электронной кошки (ЭК) – фотоэлементы, настроенные на этот свет. ЭМ и ЭК находятся в противоположных углах зала размером $D\times L=8\times 12$ м. Посередине зал разгорожен непрозрачной ширмой шириной $d=6$ м, и половина стены в той части зала, где находится ЭК, зеркальная (см. схему). В некоторый момент времени ЭМ начинает двигаться из своего угла по диагонали своей части зала с постоянной скоростью $v=2{,}5$ м/с. Через какое время после этого ЭК увидит ЭМ? В течение какого интервала времени ЭК будет видеть ЭМ, если не сдвинется с места?



<u>Ответ на вопрос</u>: Для того, чтобы человек видел себя в зеркале целиком, световые лучи, выходящие из любой точки на его поверхности, обращенной к зеркалу, должны попадать ему в глаза после отражения от зеркала. Из построения видно (точкой А отмечено положение глаз), что для этого верхний край зеркала должен находится выше горизонтали, проходящей через глаза, на расстояние, равное половине высоты макушки, а нижний край – ниже этой горизонтали на расстояние, равное половине расстояния от глаз до стоп. Значит, высота зеркала должна быть не меньше половины роста человека, то есть $h_{\min}=\frac{H}{2}=80$ см.



<u>Решение задачи</u>: Уже при построении ответа на вопрос можно было обратить внимание на следующее обстоятельство: чтобы луч попал в точку А после отражения от зеркала, он должен до отражения идти в точку, расположенную «зеркально симметрично» А по отношению к плоскости зеркала, то есть на таком же расстоянии за зеркалом, что и А от зеркала, на перпендикуляре к его поверхности, опущенном из А. В соответствии с этим, удобно для решения задачи поступить следующим образом: построить точку K′, расположенную зеркально симметрично положению ЭК (точка K) и провести лучи, идущие из половины зала, где находится ЭМ в точку K′ и попадающие на поверхность зеркала (два крайних таких луча показаны на рисунке). Ясно, что ЭК будет видеть ЭМ только из тех точек ее прямолинейной траектории, которые лежат между этими лучами (на участке CD). Точка C – центр половины зала с ЭМ, поэтому $|MC|=\sqrt{\left(\frac{L}{4}\right)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}=5$ м и ЭМ достигнет ее, двигаясь от начального положения (точка M), за время $t_1=\frac{|MC|}{v}=\frac{\sqrt{L^2+4D^2}}{4v}=2$ с. Интервал времени, в течение которого ЭК будет видеть ЭМ, равен $t=\frac{|CD|}{v}$. Для нахождения $|CD|$ обозначим смещение на этом отрезке вдоль «ширины» зала x м (см. рисунок). С учетом соотношения D



и L смещение вдоль «длины» зала составит $\frac{3}{4}x$, причем $\frac{3}{4}x + |MA| + |DB| = L$. Учтем, что $|MA| = \frac{L}{4} = 3\,\text{м}$, а из подобия треугольников K′FE и K′BD следует, что

$$|DB| = \frac{|K'B|}{|K'F|}|FE| = \frac{12+x}{10}6$$

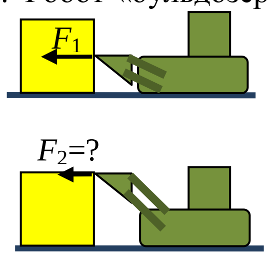
(все расстояния записаны в метрах). Значит, $\frac{3}{4}x + \frac{3}{5}x + \frac{36}{5} = 9 \Rightarrow x = \frac{4}{3}\,\text{м}$. Поскольку $\frac{3}{4}x = 1\,\text{м}$, то $|CD| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}\,\text{м} = \frac{5}{3}\,\text{м}$. Следовательно, $t = \frac{2}{3}\,\text{с}$.

Ответ: ЭК «увидит» ЭМ через время $t_1 = 2\,\text{с}$ после начала движения и будет ее видеть в течение времени $t = \frac{2}{3}\,\text{с}$.

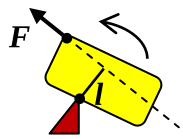
Задание 4:

Вопрос: Что такое момент силы? В чем состоит правило рычага?

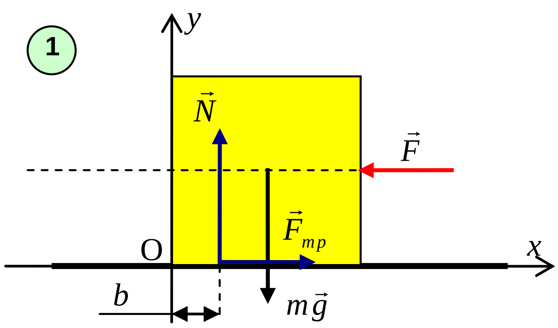
Задача: Однородный кубик покоится на горизонтальной поверхности. Робот-«бульдозер» давит на него «ковшом» в горизонтальном направлении на центр одной из боковых граней (перпендикулярно этой грани), медленно увеличивая величину силы давления. Кубик пришел в движение, когда сила достигла величины $F_1 = 6{,}6\,\text{Н}$. При какой величине силы кубик начнет двигаться, если «бульдозер» поднимет «ковш» выше, так что точка приложения горизонтальной силы давления (по-прежнему перпендикулярной грани кубика) будет теперь серединой одного из верхних ребер? Коэффициент трения кубика о поверхность $\mu = 0{,}75$.

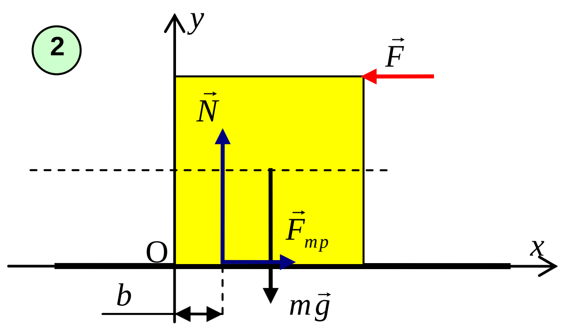


<u>Ответ на вопрос</u>: Действие силы на тело определяется ее величиной, направлением и точкой приложения. Расстояние от линии, вдоль которой направлена сила, до «точки опоры» тела называется плечом силы (см. рисунок). <u>Моментом силы</u> называется произведение величины силы на ее плечо $M = F \cdot l$. При этом нужно различать силы, вращающие тело вокруг точки опоры в разные стороны. Правило рычага состоит в том, что моменты сил, вращающих тело по часовой стрелке и против нее, в состоянии покоя должны быть уравновешены. Можно также договориться, например, что все моменты сил, вращающих тело против часовой стрелки, положительны, а вращающие по часовой стрелке – отрицательны. Тогда правило рычага можно сформулировать так: сумма моментов сил, приложенных к покоящемуся телу, равна нулю.



<u>Решение задачи</u>: Рассмотрим силы, действующие на кубик в обеих ситуациях. Будем





использовать систему координат, изображенную на рисунке. В этой системе координат из уравнения правила рычага «выпадает» сила трения, так как ее плечо относительно точки O равно нулю. При указании векторов сил, действующих на кубик, отметим, что изначально нам неизвестна точка приложения силы нормальной реакции поверхности: действие боковой силы нарушает симметрию нагрузки на поверхность (даже интуитивно ясно, что дальнее от грани действия этой силы ребро «вжимается» в поверхность сильнее, чем ближнее). Распределение сил реакции устанавливается именно таким образом, чтобы их момент компенсировал момент остальных сил. Обозначим расстояние от дальнего ребра до точки приложения $\vec{N}$ символом b (это как раз плечо силы нормальной реакции), длину ребра кубика – a, и запишем условия равновесия (равенство нулю проекций сил на оси x и y, а также правило рычага):

$$\begin{cases} F_{тр} - F = 0 \\ N - mg = 0 \\ N\,b + F\dfrac{a}{2} - mg\dfrac{a}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{тр} = F \\ N = mg \\ b = \dfrac{a}{2}\cdot\left(1 - \dfrac{F}{mg}\right) \end{cases}.$$

Как видно, эти условия действительно определяют характеристики сил реакции. Однако эти характеристики не всегда могут принимать такие значения: сила трения не может превышать максимальное значение $F_{тр} \le \mu N \Rightarrow F \le \mu mg$, а точка приложения равнодействующей сил нормальной реакции не может находиться вне площади опоры $b \ge 0 \Rightarrow F \le mg$. При нарушении первого требования кубик начнет скользить, а при нарушении второго – поворачиваться вокруг дальнего ребра. В данном случае при увеличении силы давления первым нарушается условие отсутствия проскальзывания, и $F_1 = \mu mg = 0{,}75mg$. Следовательно, $mg = \dfrac{4}{3}F_1 = 8{,}8$ Н.

Повторяя аналогично вычисления для второй ситуации, получим:

$$\begin{cases} F_{тр} - F = 0 \\ N - mg = 0 \\ N\,b + F\,a - mg\dfrac{a}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{тр} = F \\ N = mg \\ b = \dfrac{a}{2}\cdot\left(1 - \dfrac{2F}{mg}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \le \mu mg \\ F \le \dfrac{1}{2}mg \end{cases}.$$

В этом случае первым нарушается условие отсутствия вращения, и кубик начнет поворачиваться вокруг О при $F_2 = \dfrac{mg}{2} = \dfrac{2}{3}F_1 = 4{,}4$ Н.

Ответ: $F_2 = \dfrac{2}{3}F_1 = 4{,}4$ Н.